101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Point de vue de la leçon : les actions de groupes permettent des applications dans de nombreux domaines : topologie, géométrie, algèbre linéaire, théorie de Galois...

0. Préliminaires [Del 59 à 61]]

Déf : action de G sur X [Del 59]

Rq : une action sur un ensemble fini nous donne un morphisme de G dans S_|X| [Del 59]

Rq : un groupe peut agir sur n'importe quel ensemble (par forcément un groupe).

Ex : [Del 59]
- G agit sur lui-même par conjugaison
- G agit sur lui-même par translation à gauche
- Si H est un sg de G, G agit sur G/H par translation

Déf : stabilisateur, orbite, transversale [Del 60]

Prop : bijection entre O(x) et G/Gx [Del 61] *(on explicite la bijection : gx->g.Gx et on vérifie)*

I) Actions de groupes finis

1) Equation aux classes, formule de Burnside

Th : équation aux classes [Del 63] *(on montre que les orbites forment une partition de X en montrant qu'on a une relation d'équivalence)*

Csq : tout corps fini est commutatif (Wedderburn) [Per p.82] *(Z le centre de k, de cardinal q. On mq k est d'ordre q^n. On supp que k n'est pas commutatif, on fait agir k* sur k* par conjugaison. On écrit la formule des classes. Les polynômes cyclotomiques nous aident à trouver une contradiction avec les cardinaux et la divisibilité)*

Csq 2 : Un p groupe est un groupe fini d'ordre p^r (p nombre premier). Si G est un groupe d'ordre p^rm où p ne divise pas m, un p Sylow de G est un sg de G d'ordre p^r. Alors le centre d'un p-groupe n'est pas trivial [Del 63] *(G agit sur lui-même par conjugaison, équation des classes, considérations de divisibilité)*

Th : formule de Burnside [Del 64] *(E l'ensemble ds couples (g,x) tq gx=x. Alors #E=sum(#Fix(g)). D'autre aprt, #E=sum(#Gx). De cette dernière égalité, on déduit que si A est une transversale, #E est la somme des #Gx.#O(x) pour x dans A, ce qui vaut #A.#G. On conclut)*

Appl : on compte le nombre de roulettes à n secteurs et p couleurs [Del 64] *(S_n agit sur l'ensemble des coloriages, donc en particulier, si s est la permutation (1,…,n), <s> agit sur les coloriages. Deux roues sont égales ssi elles sont dans la même orbite. Il faut donc compter le nb d'orbites, donc Burnside. Il reste juste à trouver #Fix(g) pour g une permutation. On décomp la permut en k cycles, le coloriage doit être fixe sur chaque cycle, il y en a donc p^k. Reste à trouver le nb de cycles ds la decomp de s^m. Il y en a pgcd(m,n) (cf [Del 47]))*

2) Action de G sur G par translation

Prop : G agit sur lui-même par translation [Per 15]

Csq : théorème de Cayley [Per 15] *(revient à montrer que l'action est fidèle, ie que g.x=x=>g=1)*

3) Action de G sur G/H par translation

Prop : G agit sur G/H par translation à gauche.

Appl : si p est le plus petit nombre premier dans la décomposition de n, et si H est un sg de G d'indice p, alors H est distingué dans G [Del 74] *(Le noyau de l'action est un sg distingué N. On mq N est inclus dans H. Alors G/N est isomorphe à un sq de Sp donc l'indice de N dans G divise p !, mais il divise aussi #G donc c'est 1 ou p. Si c'est 1 alors N=G impossible donc c'est p donc N=H)*

4) Action de G sur G par conjugaison

Prop : G agit sur lui-même par conjugaison

Th : Sylow [Del 72]
(n=p^km. 1er th : il existe un p Sylow, ie un groupe d'ordre p^k. On appelle X l'ensemble des SOUS ENSEMBLES à p^k éléments. G agit sur X par translation à gauche. On calcule le cardinal de X, on voit qu'il n'est pas divisible par B, ça veut dire qu'il existe une orbite A qui est pas divisible par p. On pose H le stab d'un élément K de A. L'indice de H est non divisible par p car le cardinal de A ne l'est pas. Donc #H=p^km'. Soit x un élément de K. Pour tout g du stab H, g.x est dans K, et si on a deux g différents dans le stab, gx et gx' sont différents. On a une sorte d'injection du stab dans K, donc #H est plus petit que p^k. Donc #=p^k.
2e th : ils sont conjugués. S un p –Sylow de G, H un p groupe. H agit sur G/S par translation à gche. Le stab d'un élément de G/S est un sg du p groupe H donc son indice est une puissance de p : les orbites sont donc de # une puissance de p. Formule des classes : m=somme(puissances dep), or p divise pas m, donc il doit y avoir une orbite de # p^0=1. Soit xS cette orbite. On a hxS=xS pour tout h de H donc H inclus ds xSx^-1. Si H est un p Sylow on conclut par #.
3e th : nb de p-Sylow. S un p Sylow, il agit sur l'ensemble des p-Sylow par conjugaison. Les orbites sont des puissances de p. Il y a une orbite à un seul élément : {S}. Faut montrer que c'est la seule (RpA) et c'est gagné)

Corollaire : s'il y a un unique p-Sylow, il est distingué [Del 72]

Exemple : un groupe d'ordre pq n'est pas simple [Per p.27] *(raisonner sur les cardinaux)*

II) Actions de groupes dans tous les domaines

1) En géométrie

Prop : si G est un sg fini de SO(3), G agit sur les pôles des éléments de G [BR 258] [Com 171]

Th : sous groupes finis de SO(3), avec les isomorphismes [BR 258] [Com 171]

Prop : Iso(T)=S4, Iso+(T)=A4 ; Iso(C)=S4xZ/2Z ; Iso+(C)=S4 [Aless]

2) En algèbre linéaire

Prop : GLn(K)xGLm(K) agit sur Mn,m(K) par conjugaison.

Th : A une matrice de rang r. Alors A est équivalente à J_r [BMP 155] + [Cog 152] *(le th de la base incomplète est crucial)*

Cor : un invariant total est le rang [BMP 155]

Prop : r<min(n,m). Alors O_r est une partie connexe de Mn(K) (K=R ou C) *(csq de la connexité de GLn(C) et GLn+(R))* [MT 36]

Prop : clôture d'une orbite [Gou 188]

Cor : le rang est une application semi continue inférieurement. Si A_k est une suite de matrices de rang r qui converge vers A, alors rg(A) est plus petit que r.

Cor : la seule orbite fermée est O_0={0}, et la seule ouverte est O_min(n,m)

Prop : GLn(K) agit sur Mn(K) par conjugaison

Th : invariant total = Tableau de Young + polynôme caractéristique

3) En théorie de Galois

Déf : groupe de Galois d'un polynôme sur K [Goz 138] *(c'est le groupe formé des K-automph de L, où L est le corps de décomposition de P)*

Prop : Gal(P) agit fidèlement sur l'ensemble des racines de P [Goz 138] *(un K automorphisme qui fixe toutes les racines fixe L tout entier)*

Csq : le groupe de Galois d'un polynôme de degré n s'identifie à un sous groupe de Sn [Goz 138]

Déf : extension radicale [Goz 174] *(L extension radicale de K s'il existe une suite finie de corps K_i tq K C K_1…C L, ou K_i=Ki-1(alpha_i) avec alpha_i^n_i inclus dans K_i)*

Def : résoluble par radicaux [Goz 175] *(si le corps de décomposition de P est inclus dans une extension radicale de K)*

Déf : groupe résoluble

Th : K un corps de caractéristique 0. L'équation P(x)=0 est résoluble par radicaux ssi le groupe de Galois de P est résoluble [Gozard 176] *(gros théorème)*

Ex : le groupe de Galois de X^5-4X+2 est isomorphe à S5, donc non résoluble [Gozard 178] *(en effet, il a exactement 2 racines non réelles, la conjugaison correspond donc à une transposition, et comme on est dans S5, par Sylow, il existe un élément d'ordre 5 (ie un 5 cycle), donc le groupe de Galois est S5 tout entier. En effet, un lemme dit que si H un sg de Sp contient une transpo et un p-cycle alors H=Sp [Goz 177]).*

4) Dénombrement et isomorphismes exceptionnels [Perrin 105]

Prop : liste cardinaux [Per 105]

Prop : un sous groupe d'ordre n de Sn est isomorphe à Sn-1 [Per 30] *(utilise la simplicité de An et l'action de Sn sur Sn/H par translation)*

Th : Isomorphismes exceptionnels [Per 106]

III) Action d'un groupe topologique

1) Théorème d'homéomorphisme

Th : si G est compact et agit continûment et transitivement sur X, alors G/Stab(x0) est homéo à E *(en effet, G/Stab est alors compact et l'application qui va de G/Stab dans O(x0)=X est continue et bijective, donc un homéo)* [MT p.29]

Prop : H connexe et G/H connexe => G connexe [MT 31]

Appl : SO(n,R) est connexe [MT 34] *(action sur sphère de R^n, utilise O(n) compact + th homéo version simple + connexité sphère. Attention, la démo ne marche pas pour SO(n,C) n'est pas compact ! Sinon plus simple dans Audin, connexe par arcs) (et la sphère est connexe car image de x/N(x))*

Csq : O(n,R) a deux CC [MT 34]

2) Transport de structure

Rq : on peut munir d'une topologie certains ensembles, par transport de structure.

Ex : GLn(K) agit transitivement sur Gr_m,n(K). On a une bijection entre les deux, on transporte la topologie de GLn(K) sur Gr_m,n(K).

Développements :

1 - Iso+(T) et Iso+(C) [Aless 62] (***)

2 - Isomorphismes exceptionnels [Perr 105] (**)

3 – LRQ (**)

SO3(C) isomorphe à PSL_2(C) [???] (**)

Action de Steinitz [Gou 188] + [MT 36] + [Cog 152] (***)

Sous groupes finis de SO_3, 3 cas [Combes] + [BR] (**)

Bibliographie :

- Mneimné-Testard – Groupes de Lie
- Alessandri – Thèmes de géométrie
- Perrin – Cours d'algèbre
- Gozard – Théorie de Galois
- Delcourt – Théorie des groupes
- Bouvier Richard
- BMP – Objectif Agrégation
- Cognet – Algèbre linéaire
- Combes – Algèbre et géométrie
- Gourdon - Algèbre

Rapport jury 2005-2009 :

Des exemples de nature différente doivent être présentés : actions sur un ensemble fini, sur un espace vectoriel, sur un ensemble de matrices, sur des polynômes. Les exemples issus de la géométrie ne manquent pas. Il faut savoir relier les stabilisateurs de deux éléments d'une même orbite. Cette leçon est transversale. Les exemples doivent venir aussi de la géométrie et de l'algèbre linéaire, comme l'action à gauche de GL(n) sur Mat(n, p) : savoir d´écrire les orbites des actions de groupes présentées.

Questions du jury 2010 :

- Montrer que Orb(x) est en bijection avec G/Stab(x)
- Interpréter la notion de matrices semblables en tant qu'action de groupes
- Trouver tous les morphismes de Sn dans {±1}. Et de Sn dans C* ?
- Quelles sont les classes de conjugaison dans SO2(R) ? Dans O2(R) ?
- Comment surjecter géométriquement S4 sur S3, sachant que le groupe d'isométrie du tétraèdre est S4 ? Comment injecter S4 dans S8, avec le cube ?
- Compter les endomorphismes nilpotents dans GLn(Fp). Commencer avec n=2.